- $V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$




$$\bar{v}_{\bar{u}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\,\bar{u}$$

$$\bar{u}\cdot\bar{u} \neq 0$$

- $V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ prodotti scalari definiti positivi = prodotti scalari euclidei.

Ad ogni prodotto scalare su $V_n(\mathbb{K})$ è associata una matrice $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ simmetrica una volta che si è fissata una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)$

$$B = (( \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j ))_{i,j=1}^{n}$$

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$$
$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = {}^tXBY$$

$$\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$
$$\mathcal{B}'=(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad X'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad y'=\begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} \quad E'=\begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}={}^tEX={}^tE'X'$$
$$\bar{y}={}^tEy={}^tE'y'$$

$$\bar{x}\cdot\bar{y}={}^tXBy={}^tX'B'y' \Rightarrow$$

se $X'=A'X \quad y'=A'y$

$$\Rightarrow {}^tXBy={}^t\underbrace{(A'X)}_{{}^tX'}B'\underbrace{(A'y)}_{y'}=$$

$$={}^tX({}^tA'B'A')y \quad \forall X,y$$

$$\boxed{B={}^tA'B'A'}$$

**Def:** Su $\mathbb{K}^n$ si dice **prodotto scalare standard** il prod. scalare

$$\cdot \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (x, y) \to {}^t x y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

prodotto scalare con matrice rappresentativa $I$ rispetto la base canonica.

$\Rightarrow$ è sempre NON DEGENERE.

Se $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ il prodotto scalare standard è definito positivo $\Rightarrow$ Euclideo.

$$\boxed{\bar{X} \cdot \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

questo $= 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 0$

e in generale è $\neq 0$.

**Def:** Una sequenza di vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$ è detta

ortogonale se $\forall i,j : i \neq j \Rightarrow \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$, $\bar{e}_i \neq \underline{0}$

ortonormale se $\forall i,j : \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$

**OSS:** In $V_n(\mathbb{K})$ una sequenza ortonormale è sempre libera.

(una seq. di vettori ortogonale e tale che $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i \neq 0$ $\forall i$).

→ seq. ortogonale priva di vettori isotropi.

**DIM** Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$ una seq. ortogonale priva di vettori isotropi e supponiamo

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_i \bar{e}_i + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \bar{e}_i \cdot (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_i \bar{e}_i + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = \bar{e}_i \cdot \underline{0} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_1) + \dots + \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) + \dots \alpha_n (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_n) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = 0$

siccome $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i \neq 0$ ne segue $\alpha_i = 0$

$\Rightarrow$ la sequenza è libera $\square$

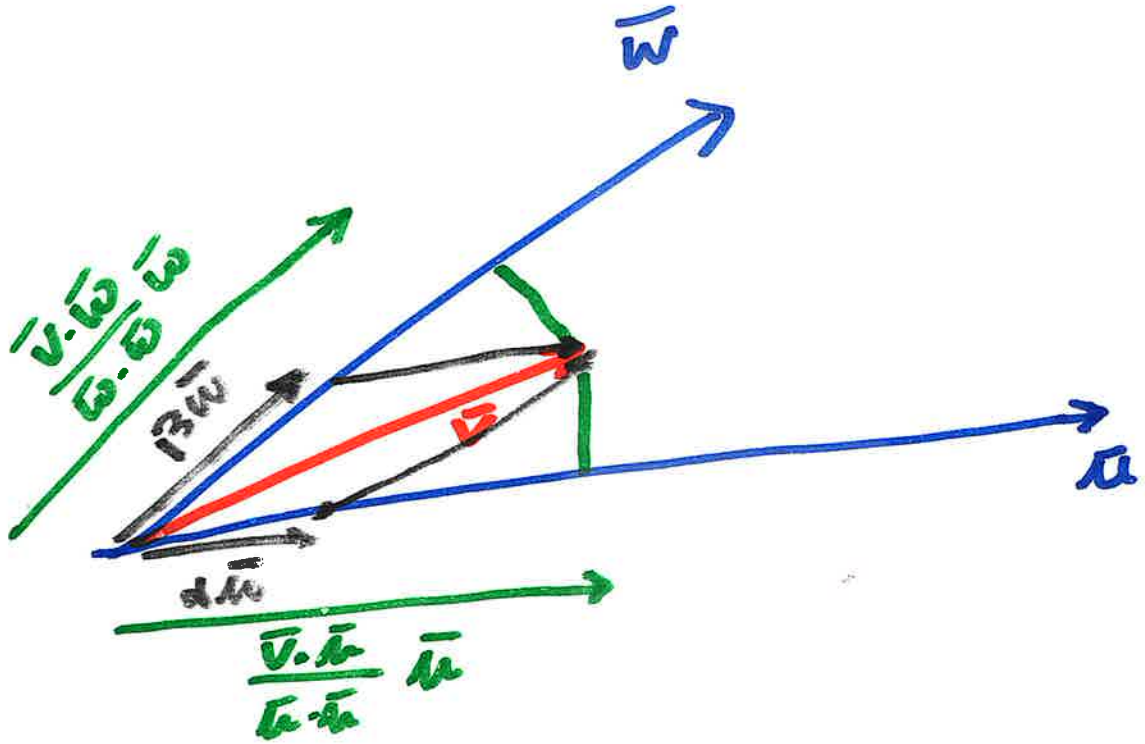
Sia adesso $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base ortonormale di $V_n(\mathbb{K})$.

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

d'altro canto

$$\bar{v} \cdot \bar{e}_i = \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = \alpha_i$$

I coefficienti di Fourier di $\bar{v}$ rispetto i vettori di $\mathcal{B}$ sono le componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

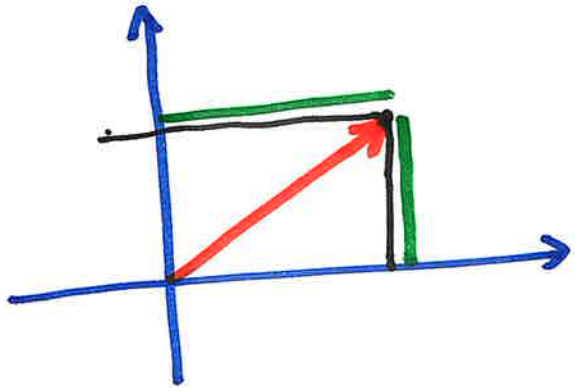



$$\bar{v} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{w}$$

$(\alpha, \beta)$

$$\alpha \neq \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}$$

$$\beta \neq \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}$$



# Algoritmo di Gram/Schmidt (6/5).

**Input:** Sequenza di vettori liberi $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \dots \bar{e}_k)$

**Output:** Sequenza di vettori liberi $(\bar{e}_1'\ \bar{e}_2' \dots \bar{e}_k')$ tale che

1) $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' = 1$
2) $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j' = 0$ se $i \neq j$

] ORTONORMALE

3) $\forall k$: $\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k) = \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_k')$.

**Idea:** ad ogni vettore $\bar{e}_j$ sottraiamo le sue proiezioni sui vettori precedenti e poi dividiamo il risultato per la sua norma.

- $\bar{e}_1 \neq 0 \rightarrow \bar{e}_1'' := \bar{e}_1 \quad \bar{e}_1 := \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}} \bar{e}_1'' =$

$$= \|\bar{e}_1''\|^{-1} \cdot \bar{e}_1''$$

- $\bar{e}_2 \rightarrow \bar{e}_2'' := \bar{e}_2 - \frac{(\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_1'}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'}$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$$

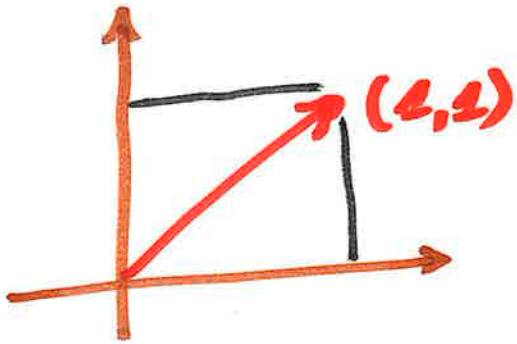
$$\bar{e}_2' := \|\bar{e}_2''\|^{-1} \cdot \bar{e}_2''$$

$\vdots$

- $\bar{e}_i \rightarrow \bar{e}_i'' := \bar{e}_i - \sum_{j<i} (\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_i)\bar{e}_j'$

$$\bar{e}_i' := \|\bar{e}_i''\|^{-1} \cdot \bar{e}_i''$$

N.B: Serve 1) $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' \neq 0$ $i<j$ 2) $\bar{e}_i'' \cdot \bar{e}_i''$ sia un quadrato.




$(1,1)\cdot(1,1)=2$

**OSS:**



Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi ortonormali rispetto il medesimo prodotto scalare ed $A$ la matrice di cambiamento di base rispetto ad esse.
e $B$ la matrice del prod. scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e
$B'$ la matrice del prod. scalare rispetto a $\mathcal{B}'$.

$${}^tABA = B' \qquad \text{ma } B = B' = I_n$$

$\Rightarrow {}^tAA = I_n \Rightarrow \boxed{{}^tA = A^{-1}}$

$\Rightarrow$ **Def:** Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta **ortogonale** se $A^{-1} = {}^tA$.

⚠ **N.B:** le righe (colonne) di una matrice ortogonale sono un sistema di vettori ortonormale.

infatti esse sono le componenti di una base ortonormale rispetto ad un'altra

e quindi $C_i \cdot C_j = \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

e similmente le righe.

**oss:** Se $A$ è ortogonale $\Rightarrow$ $\det(A) = \pm 1$

$$\det({}^tAA) = \det({}^tA)\cdot\det(A) = \det(A)^2 = \det(I) = 1$$

**Def:** $GO_n(\mathbb{K}) := \{ A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid {}^tA = A^{-1} \} \subseteq$

$$\subseteq GL_n(\mathbb{K})$$

Gruppo Generale ortogonale.

$SO_n(\mathbb{K}) := \{ A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid A \in GO_n(\mathbb{K}) \ \det(A) = +1 \}$.

Gruppo speciale ortogonale.

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \ \& \ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = I \right\}.$$

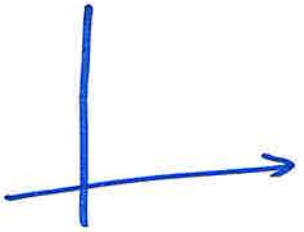
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = +1 \Rightarrow ad - bc = 1$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad ac + bd = 0$$
$$c^2 + d^2 = 1$$

$a = \cos\theta$

$b = \pm\sin\theta = \varepsilon_1 \sin\theta$



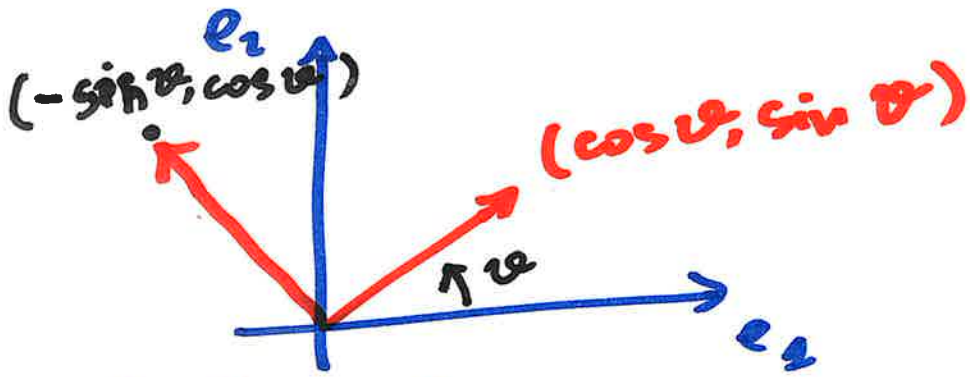
$c = \cos\psi$

$d = \pm\sin\psi = \varepsilon_2 \operatorname{sen}\psi$ ~~$ad - bc = 1$~~

~~$\pm\cos\theta\sin\psi \mp$~~

$$\begin{cases} \cos\theta \cdot \varepsilon_2 \sin\psi - \varepsilon_1 \sin\theta\cos\psi = 1 \\ \cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\,\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a = \cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\psi \\ \varepsilon_1 \sin\theta & \varepsilon_2 \sin\psi \end{bmatrix}$$

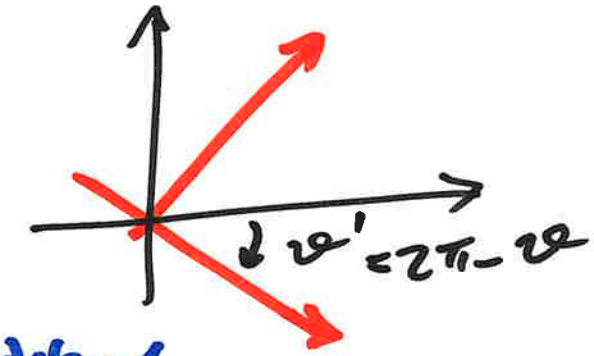
$$\varepsilon_1(\cos\vartheta\cdot\sin\psi) - \varepsilon_2(\sin\vartheta\cos\psi) = 1 \qquad \forall\,\vartheta,\,\psi$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = -1} \qquad \varepsilon_2 = +1 \qquad \begin{cases}\cos\vartheta = \sin\psi \\ \sin\vartheta = \cos\psi\end{cases} \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$$

$$\cos\vartheta\cos\psi + \sin\vartheta\sin\psi\,\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$$

$$\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \quad \underline{\text{ok}}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

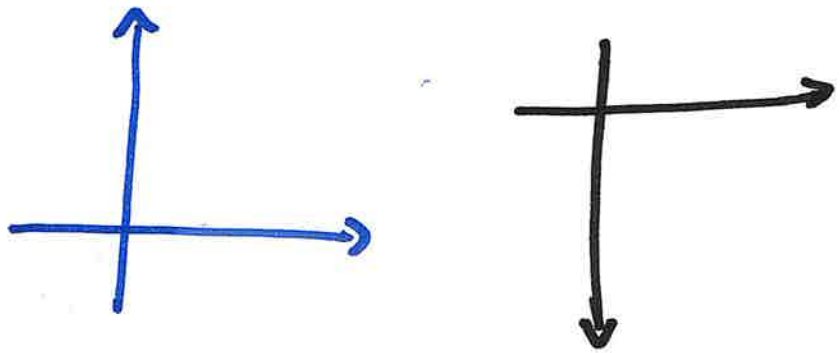



di det = 1

le trasformazioni ortogonali del piano corrispondono alle rotazioni.

$SO_2(\mathbb{R})$

$$GO_2(\mathbb{R}) = \langle SO_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

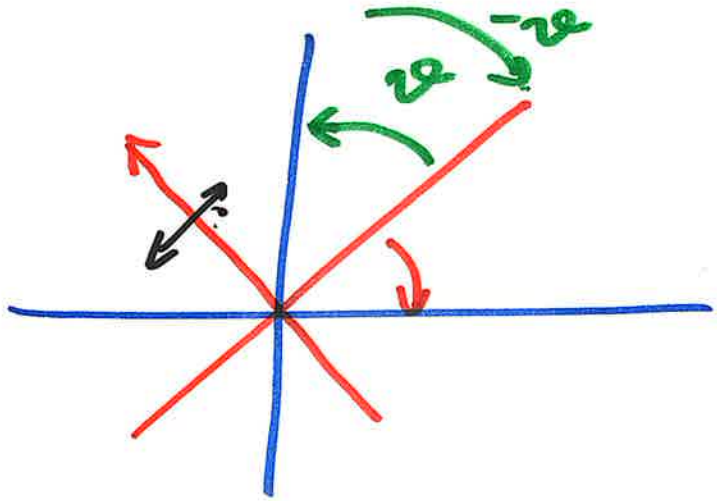


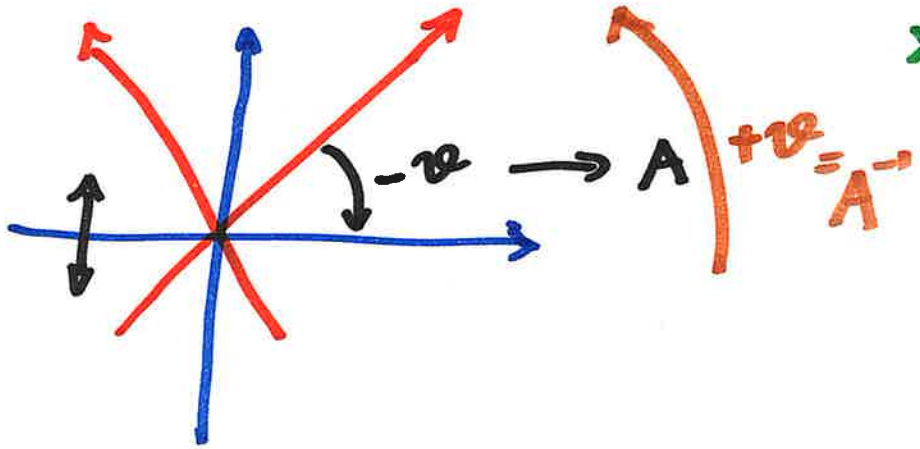
$$(x, y) \to (x, -y)$$

$$\det \begin{cases} GO_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, \cdot) = (\{-1, 1\}, \cdot) \\ M \to \det(M) \end{cases}$$

$$\ker(\det) = SO_2(\mathbb{R})$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \frac{GO_2(\mathbb{R})}{SO_2(\mathbb{R})} \cong \mathbb{Z}_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$$




$x = y \Rightarrow$ applico la trasf. lineare che manda

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

in $(1,0), (0,1)$

rifletto rispetto asse $y$

$(1\ 0) \to (1\ 0)$

$(0\ 1) \to (0\ -1)$

inversa

$A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A$

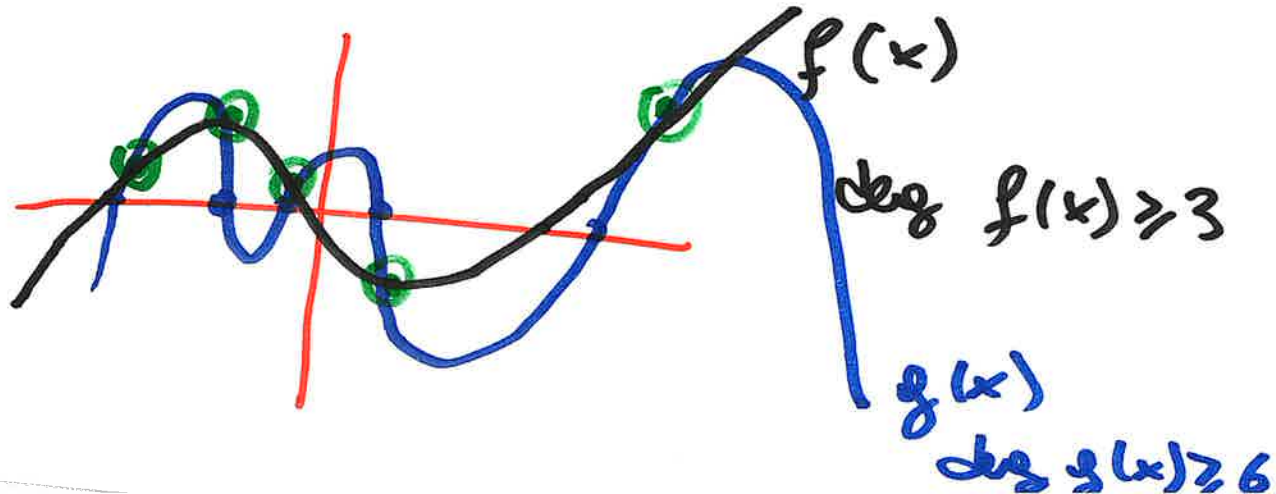
# Sistemi lineari in $\mathbb{R}$.

Sia data la funzione

$y = f(x)$ ove $\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r}$

$f(x) = a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2 e^x + \dots$

Sono date coppie di valori $(x_i, y_i)$ e vogliamo trovare i coeff. $a_0 \dots a_r$ tali che $f(x_i) = y_i$



$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_t x_1^t \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_t x_2^t \\ \vdots \\ y_m = a_0 + a_1 x_m + \dots + a_t x_m^t \end{cases}$$

↑ sistema lineare di $m$ equazioni in $t$ incognite $a_0\ a_1 \dots a_t$

se $t > m$

$t < m$